Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A.U. 2018-2019
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1

Examen d'Analyse
Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Exercice 1.(3*pts*)
Démontrer que les réels suivants sont irrationnels :

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ où x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Indication: On pourra supposer que $r=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ *est rationnel et calculer* $(r-\sqrt{2})^2$

Exercice 2.(5*pts*)
Soient u_0 et v_0 deux nombres réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose

$$u_{n+2}=\frac{u_n+u_{n+1}}{2} \quad \text{et} \quad v_n=u_{n+1}+\frac{1}{2}u_n$$

(1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante puis déterminer sa valeur.
(2) Donner une relation entre u_n et u_{n+1} satisfaite pour tout $n\in\mathbb{N}$.
(3) Trouver $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n-\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
(4) En déduire, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
(5) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 3. (5 *pts*)
Soient $f;g:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivables sur $]a,b[$:
On suppose que $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]a,b[$.

(1) Rappeler l'énoncé de théorème de Rolle.
(2) Montrer que $g(x)\neq g(a)$ pour tout $x\in]a,b[$.
(3) On pose

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)), \quad \forall x\in[a,b]$$

Montrer que F vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c\in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(4) On suppose que $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=\ell$$

(*Indication*: *On pourra utiliser le résultat précédent sur l'intervalle* $]x,b[$)

(5) **Application:** Calculer

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 4. (7 *pts*)
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

(1) En étudiant la fonction $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que $\dfrac{1-x}{1+x} \in [-1,1]$ si et seulement si $x \in \mathbb{R}^+$. En déduire le domaine de définition de f.
(2) Donner le domaine de dérivation de f et calculer sa dérivée.
(3) Justifier que la fonction $x \longmapsto \arctan(\sqrt{x})$ est dérivable et calculer sa dérivée.
(4) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2\arctan(\sqrt{x})$.
(5) Donner le tableau de variation complet de f ainsi que les asymptotes de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.
(6) Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $x = 0$.
(7) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J que l'on précisera puis déterminer f^{-1}.